Cliffordova algebra in roboti

Anton Potočnik

19. maj 2007

1 Uvod

Cliffordovo algebro praviloma spremlja antikomutacijska relacija $\{\gamma^a, \gamma^b\}_+ = 2\eta^{ab}$. Elemente, ki ustrezajo takšni relaciji najdemo tako v klasični kvantni fiziki, npr. Paulijeve matrike (σ^i), kot v relativistični kvantni fiziki, npr. Diracove oz. gama matrike (γ^a). Ti dve področji pa nista edini. V zadnjem času se Cliffordova algebra pojavlja tudi v računalništvu ter robotiki [5, 3] in predstavlja zelo učinkovito in uspešno orodje za hitro reševanje geometrijskih problemov in analizo več dimenzijskih signalov. To je med drugim zelo pomembno ravno pri robotih, saj želimo da bi bil njihov odzivni čas (Perception-Action Cycle) kolikor se da kratek.

Clifford je v svoji algebri združil Grassmannovo zunanjo algebro in Hamiltonove kvaternione ter prišel do zelo splošne geometrijske algebre, ki je popolnoma neodvisna od koordinatnega sistema in zna operirati z objekti poljubnih dimenzij in oblik hkrati. Lahko rečemo, da je Cliffordova algebra posplošitev kompleksnih števil, kvaternionov, vektorskega produkta in drugih matematičnih konceptov [4].

Začnimo kar z geometrijsko algebro, ki je identična Cliffordovi, le da njene elemente interpretiramo kot geometrijski objekte kot so točke, premice, ravnine, itd.

2 Geometrijska algebra

2.1 Definicije in primeri v 3D

Geometrijsko (Cliffordovo) algebro v treh dimenzijah Cl_3 tvorijo elementi $\hat{e}_i \in \mathbb{R}^3$, $\hat{e}_i = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$. Za te elemente veljajo naslednja pravila

$$\begin{aligned} \hat{e}_i\hat{e}_j &= -\hat{e}_j\hat{e}_i, && (1)\\ \hat{e}_i^2 &= 1, && (2)\\ \hat{e}_i &\perp \hat{e}_j. && (3) \end{aligned}$$

Prva relacija je znano antikomutacijsko pravilo, druga pa skrbi za normalizacijo. Če je iz uvoda η^{ij} matrika s samimi enicami po diagonali, je ta relacija identična relacijama (1, 2) .

Poglejmo si primer. Pomnožimo vektorja $\vec{a} = a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2$ ter $\vec{b} = b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2$ in upoštevajmo zgornji relaciji (1, 2)

$$\vec{a}\vec{b} = (a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2)(b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2) = a_1b_1 + a_2b_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{e}_1\hat{e}_2.$$

Prva dva člena nas spominjata na skalarni produkt, druga dva pa nekako na vektorski produkt s to razliko, da kot rezultat ne dobimo vektorja, temveč produkt dveh elementov - bivektor. Zgornji produkt zapišemo še malce drugače

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\wedge\vec{b}$$

in ga poimenujemo *geometrijski produkt*. Geometrijski produkt je sestavljen iz vsote *skalarnega produkta* in *zunanjega produkta*. Za ta dva produkta veljajo naslednja pravila

$$\hat{e}_i\cdot\hat{e}_i = 1 \qquad \hat{e}_i\wedge\hat{e}_i = 0, \tag{4}$$

$$\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j = 0 \qquad \hat{e}_i\wedge\hat{e}_j = -\hat{e}_j\wedge\hat{e}_i. \tag{5}$$

Če bi med seboj pomnožili tri vektorje, ki kažejo v poljubni smeri v prostoru (npr. $\vec{v} = v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2 + v_3\hat{e}_3$), bi po geometrijskem množenju v rezultatu nastopala linearna kombinacija vseh možnih produktov elementov iz $\mathbb{R}^3$, od skalarja pa do produkta vseh treh elementov. Bazni elementi geometrijske algebre so torej vsi elementi, ki jih dobimo z množenjem generatorjev. Zato se element Cliffordove algebre v treh dimenzijah ($Q \in Cl_3$) enolično zapiše kot

$$Q = q_0 1 + q_1\hat{e}_1 + q_2\hat{e}_2 + q_3\hat{e}_3 + q_4\hat{e}_1\hat{e}_2 + q_5\hat{e}_1\hat{e}_3 + q_6\hat{e}_2\hat{e}_3 + q_7\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3.$$

$\mathcal{C}\ell_3$	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_{12}$	$\mathbf{e}_{31}$	$\mathbf{e}_{23}$	$\mathbf{e}_{123}$
1	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_{12}$	$\mathbf{e}_{31}$	$\mathbf{e}_{23}$	$\mathbf{e}_{123}$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	1	$\mathbf{e}_{12}$	$-\mathbf{e}_{31}$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_{123}$	$\mathbf{e}_{23}$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_{12}$	1	$\mathbf{e}_{23}$	$-\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_{123}$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_{31}$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_{31}$	$-\mathbf{e}_{23}$	1	$\mathbf{e}_{123}$	$\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_{12}$
$\mathbf{e}_{12}$	$\mathbf{e}_{12}$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_{123}$	-1	$\mathbf{e}_{23}$	$-\mathbf{e}_{31}$	$-\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_{31}$	$\mathbf{e}_{31}$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_{123}$	$-\mathbf{e}_1$	$-\mathbf{e}_{23}$	-1	$\mathbf{e}_{12}$	$-\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_{23}$	$\mathbf{e}_{23}$	$\mathbf{e}_{123}$	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_{31}$	$-\mathbf{e}_{12}$	-1	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_{123}$	$\mathbf{e}_{123}$	$\mathbf{e}_{23}$	$\mathbf{e}_{31}$	$\mathbf{e}_{12}$	$-\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	-1

Tabela 1: Vsi produkti elementov Cl^3 [1].

Cliffordova algebra, ki jo tvorijo bazni vektorji iz $\mathbb{R}^3$ ima $2^3 = 8$ baznih elementov, torej vse možne kombinacije, vključno s skalarjem. Zaradi preglednosti vpeljimo zapis $\hat{e}_i\hat{e}_j = \hat{e}_{ij}$. Produkte baznih vektorjev Cliffordove algebre v treh dimenzijah predstavlja (tabela 1). Zadnji element, ki predstavlja produkt vseh generatorjev se imenuje *pseudoskalar* in je v Cliffordovi algebri še posebej pomemben. V Cl_3 ga označimo kot

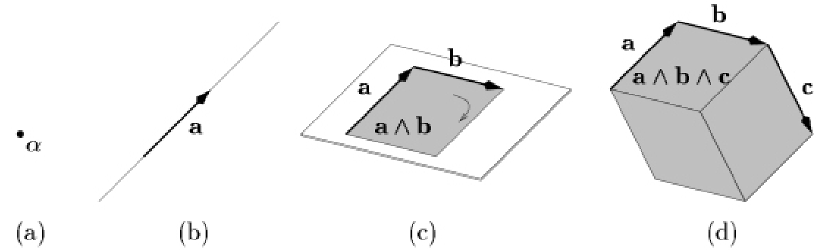
$$\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3 = \hat{e}_{123} = I.$$

Zanj velja, da komutira z vsemi elementi Cliffordove algebre in da je njegov kvadrat enak $I^2 = -1$.

Elemente, ki so linearna kombinacija $\hat{e}_i$ imenujemo vektorji, tiste, ki so linearna kombinacija $\hat{e}_i\hat{e}_j$ imenujemo bivektorje, naslednje trivektorje itd. Bivektorje, trivektorje in naslednje enostavno izračunamo tako, da naredimo ustrezno število zunanjih produktov med ustreznimi nekomplanarnimi vektorji. Naredimo primer za bivektor. Upoštevati moramo seveda pravila (4 in 5)

$$\begin{aligned}\vec{a}\wedge\vec{b} &= (a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3)\wedge(b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2 + b_3\hat{e}_3) = \\ &= (a_1b_2 - b_1a_2)\hat{e}_{12} + (a_1b_3 - b_1a_3)\hat{e}_{13} + (a_2b_3 - b_2a_3)\hat{e}_{23}.\end{aligned}$$

V geometrijski algebri si lahko te elemente tudi grafično predstavljamo. Skalar je ekvivalenten točki v izhodišču (slika 1.a), vektor usmerjeni premici (slika 1.b), bivektor orientirani ploskvi (slika 1.c) in trivektor orientiranem volumnu (slika 1.d). V našem primeru, ko smo v treh dimenzijah so trivektorji tudi pseudoskalarji.



Slika 1: Reprezentacija Cliffordovih elementov v geometriji [1].

Pomembno je poudariti, da oblika teh elementov ni definirana, definirana je le dolžina vektorja, ploščina bivektorja, volumen trivektorja itd.

Videli smo, da s skalarnim produktom dveh vektorjev dobimo skalar, z zunanjim produktom pa bivektor. Iz tega lahko zaključimo, da skalarni produkt nekako zmanjšuje dimenzijo vhodnih elementov, medtem ko zunanji produkt dimenzijo vhodnih elementov povečuje.

Skalarni produkt moramo še malo popraviti. Naši elementi so različnih dimenzij in če želimo skalarno pomnožiti dva različno dimenzionalna ne dobimo več skalarja. Zato skalarni produkt redefiniramo tako, da je dimenzionalnost rezultata enaka razliki dimenzij vhodnih elementov. Drugi element zmanjšamo za dimenzijo prvega, če pa sta elementa enake dimenzije računamo, kakor že znamo. Skalarni produkt poimenujemo *notranji produkt* in ga označimo z $A \rfloor B$. Notranji produkt predstavlja komplement pravokotne projekcije A na B. Naredimo ilustrativen primer. Z notranjim produktom pomnožimo vektor $\vec{v} = a\hat{e}_1 + a'\hat{e}_3$ ter bivektor $B = b\hat{e}_{12}$

$$\vec{v} \rfloor B = (a\hat{e}_1 + a'\hat{e}_3) \rfloor b\hat{e}_{12} = ab\hat{e}_2$$

Geometrijski produkt je zelo zanimiv predvsem zato, ker lahko definiramo njegov inverz. Poljubnemu elementu te geometrijske algebre lahko pripišemo inverzno vrednost ($A \in Cl_3$)

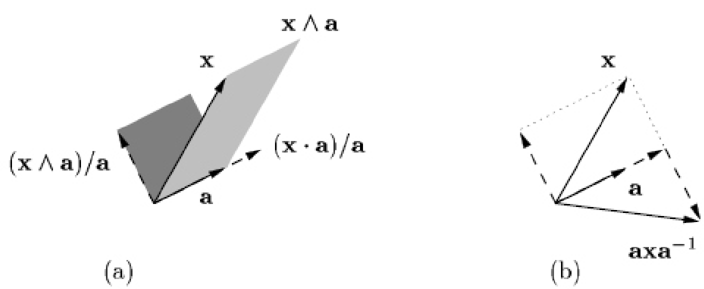
$$A^{-1} = \frac{\widetilde{A}}{A \rfloor \widetilde{A}},$$

kadar je $A \rfloor \widetilde{A} \neq 0$, kjer je $\widetilde{A}$ nasprotni A, torej če je $A = \vec{a} \wedge \vec{b} \wedge \vec{c}$ je $\widetilde{A} = \vec{c} \wedge \vec{b} \wedge \vec{a}$. Hitro se da preverit, da je $A \rfloor \widetilde{A}$ skalar in da ima inverz enako dimenzionalnost kot začetni element.

Do sedaj smo definirali in pokazali dovolj lastnosti, da lahko prikažemo praktično uporabo geometrijske algebre.

2.2 Reševanje geometričnih enačb

Z dosedanjim znanjem že lahko algebraično rešimo geometrijske probleme kot so projekcije, rotacije, itd.



Slika 2: (a) projekcija in rejekcija $\vec{x}$ glede na $\vec{a}$. (b) Zrcanjenje $\vec{x}$ čez $\vec{a}$ [1].

Ko poznamo inverz geometrijskega produkta, lahko z lahkoto izračunamo komponento vektorja $\vec{x}$, ki je pravokotna na vektor $\vec{a}$ (slika 2.a). Vemo, da je zunanji produkt med dvema vzporednima vektorjema enak nič (enačba 4) in da je skalarni produkt med dvema pravokotnima vektorjema prav tako enak nič. Zato velja

$$\vec{x}_\perp \rfloor \vec{a} = 0 \ \ in \ \ \vec{x} \wedge \vec{a} = \left(\vec{x}_\perp + \vec{x}_\parallel\right) \wedge \vec{a} = \vec{x}_\perp \wedge \vec{a}.$$

Zapišimo geometrijski produkt

$$\vec{x}_\perp \lrcorner \vec{a} + \vec{x}_\perp \wedge \vec{a} = \vec{x}_\perp \vec{a} = \vec{x} \wedge \vec{a}.$$

Pomnožimo z desne z inverznim $\vec{a}$ in dobimo rešitev

$$\vec{x}_\perp = (\vec{x} \wedge \vec{a})\, \vec{a}^{-1}. \tag{6}$$

Projekcijo vektorja $\vec{x}$ na vektor $\vec{a}$ dobimo še enostavneje z razmislekom, da je skalarni produkt vektorjev $\vec{x}$ in $\vec{a}$ enak geometrijskemu produktu vektorjev $\vec{x}_\parallel$ in $\vec{a}$ (saj je zunanji produkt enak nič) (slika 2.a)

$$\begin{aligned} \vec{x}_\parallel \vec{a} &= \vec{x} \lrcorner \vec{a}, \\ \vec{x}_\parallel &= (\vec{x} \lrcorner \vec{a})\, \vec{a}^{-1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Na hitro si poglejmo še zrcaljenje vektorja $\vec{x}$ čez vektor $\vec{a}$ (slika 2.b). Zrcalna slika vektorja $\vec{x}$ ima v primerjavi z vektorjem le nasprotno predznačeno pravokotno komponento glede na vektor $\vec{a}$

$$\vec{x}' = \vec{x}_\parallel - \vec{x}_\perp = (\vec{x} \lrcorner \vec{a})\, \vec{a}^{-1} - (\vec{x} \wedge \vec{a})\, \vec{a}^{-1} = (\vec{a} \lrcorner \vec{x} + \vec{a} \wedge \vec{x})\, \vec{a}^{-1} = (\vec{a})\, \vec{x}\, (\vec{a})^{-1},$$

kjer smo upoštevali izraza (6), (7) in komutativnost notranjega produkta ter antikomutativnost zunanjega produkta (5).

Iz teh treh enostavnih primerov operiranja z geometrijskimi elementi na popolnoma algebraični način vidimo moč geometrijske algebre. Ta moč pa se še poglobi, saj lahko geometrijsko (Cliffordovo) algebro enostavno posplošimo na več dimenzij, kjer je računanje z objekti prav tako enostavno.

2.3 Posplošitev v nD

V n dimenzijah imamo n generatorjev $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, ..., \hat{e}_n\}$, kateri tvorijo 2^n baznih elementov Cliffordove algebre. Zanje še vedno velja antikomutacijska relacija

$$\hat{e}_i \hat{e}_j = -\hat{e}_i \hat{e}_j,$$

posplošimo pa norme oz. kvadrate teh generatorjev

$$\begin{aligned} \hat{e}_i^2 &= +1; \quad 1 \leq i \leq p \\ \hat{e}_i^2 &= -1; \quad p+1 \leq i \leq p+q \\ \hat{e}_i^2 &= 0; \quad p+q+1 \leq i \leq p+q+r \end{aligned}$$

Takšno Cliffordovo algebro poimenujemo $Cl_{p,q,r}$, kjer je $p+q+r=n$ in te indekse imenujemo podpis Cliffordove algebre. Na primer, Evklidsko algebra, o kateri smo govorili v prejšnjem delu, označimo z $Cl_{3,0,0}$.

Geometrijski produkt, notranji in zunanji produkt, inverz, izrazi za projekcije, zrcaljenja, itd. ostajajo enaki kot smo definirali v prejšnjem poglavju. Razlika je le, da sedaj operiramo z višje dimenzijskimi objekti.

Morda je dobro v tem delu poudariti pomembnost pseudoskalarja I. Vsak element, ki ga pomnožimo s pseudoskalarjem, postane njegov dualni element dimenzije $n-m$, če je n dimenzija prostora, m pa dimenzija začetnega elementa. Oglejmo si primer v treh dimenzijah. Bivektor predstavlja ravnino v prostoru. Če ga pomnožimo s pseudoskalarjem dobimo vektor, ki pa predstavlja normalo na to ravnino. Zato lahko na primer vektorski produkt definiramo kot zunanji produkt dveh vektorjev pomnožen s pseudoskalarjem [2]

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) I.$$

3 Motorna algebra

3.1 Motorji, rotorji in translatorji

V tem delu bomo pokazali kako lahko z geometrijsko algebro relativno preprosto računamo gibanje robotov, oz. modeliramo povezne mehanske člene z gibljivimi sklepi ali raztegljivimi ročicami. Radi bi torej računali rotacije in translacije geometrijskih objektov v prostoru. Več o tem v [3, 5, 6].

3.1.1 3D rotacije

Za začetek si oglejmo rotacije elementov v treh dimenzijah. Zunanji produkt dveh pravokotnih vektorjev npr. $\hat{e}_i$ in $\hat{e}_j$ je bivektor $\hat{e}_{ij}$, ki predstavlja ravnino na kateri ležita vektorja $\hat{e}_i$ in $\hat{e}_j$. Če ta bivektor geometrijsko pomnožimo z $\hat{e}_j$, dobimo vektor $\hat{e}_i$. Torej bivektor $\hat{e}_{ij}$ rotira vektorje za kot -90° v usmerjeni ravnini, ki jo predstavlja, njegov kvadrat pa je enak $\hat{e}_{ij}^2 = -1$. V treh dimenzijah imamo tri takšne bivektorje, $\hat{e}_{23}$, $\hat{e}_{13}$ in $\hat{e}_{12}$. Vsi trije rotirajo vektorje v svojih ravninah za -90°, njihov kvadrat je enak -1, produkt vseh treh je prav tako enak -1 in če pomnožimo prva dva dobimo tretjega, kar lahko še ciklično permutiramo.

Te lastnost so natanko enake lastnostim kvaternionov [2]. Če postavimo $\hat{\imath} = \hat{e}_{23}$, $\hat{\jmath} = \hat{e}_{13}$ in $\hat{k} = \hat{e}_{12}$ za njih velja

$$\begin{aligned} \hat{\imath}^2 = \hat{\jmath}^2 = \hat{k}^2 = \hat{\imath}\hat{\jmath}\hat{k} &= -1, \\ \hat{\imath}\hat{\jmath} &= \hat{k}, \end{aligned}$$

kjer lahko zadnjo relacijo ciklično permutiramo. Iz algebre kvaternionov velja, da lahko poljubno rotacijo v treh dimenzijah izračunamo z enotskim kvaternionim, za katerega velja $R\widetilde{R} = 1$, kjer je $R = a_0 + a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$, $\widetilde{R}$ pa ustrezna nasprotna vrednost. To znamo v geometrijski algebri zapisati z ustreznimi bivektorji in skalarjem. Kvaternionska algebra je potemtakem podmnožica geometrijske algebre v treh dimenzijah $Cl_{3,0,0}$.

V geometrijski algebri lahko rotacijo izvedemo z dvema zaporednima zrcaljenjema. Najprej zrcalimo vektor $\vec{x}$ čez $\vec{m}$ nato pa še čez $\vec{n}$

$$\vec{x}'' = \vec{n}\vec{x}'\vec{n}^{-1} = \vec{n}\vec{m}\vec{x}\vec{m}^{-1}\vec{n}^{-1} = (\vec{n}\vec{m})\,\vec{x}\,(\vec{n}\vec{m})^{-1} = R\vec{x}R^{-1} = R\vec{x}\widetilde{R}.$$

Geometrijski produkt med dvema vektorjema lahko zamenjamo z vsoto skalarnega in zunanjega produkta. Zunanjega pa lahko zapišemo s pseudoskalarjem pomnoženim vektorskim produktom

$$\vec{m}\vec{n} = \vec{n} \cdot \vec{m} + I(\vec{n} \times \vec{m}) = |n|\,|m| \cos(\phi) + I\vec{v}\,|n|\,|m| \sin(\phi),$$

kjer je $\vec{v}$ enotski vektor. Če zrcalimo preko enotskih vektorjev $\vec{m}$ in $\vec{n}$ in upoštevamo, $I^2 = -1$, dobimo Eulerjevo reprezentacijo rotacije, ki jo imenujemo *rotor*

$$R = \vec{m}\vec{n} = \cos(\phi) + I\vec{v}\sin(\phi) = e^{I\vec{v}\phi},$$

kjer je $\vec{v}$ enotski vektor normale na ravnino v kateri ležita $\vec{m}$ in $\vec{n}$, torej ravnino v kateri vrtimo za kot ϕ.

3.1.2 3D kinematika v 4D geometrijski algebri

Rotacija je v 3D prostoru linearni operator, to pa ne velja za translacijo. Zato se poslužimo trika, da objekte iz trirazsežnega prostora vložimo v štirirazsežni prostor. To se nazorno vidi v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} \vec{p}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \vec{t} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{p} \\ 1 \end{bmatrix},$$

kjer je R 3×3 matrika rotacije, $\vec{t}$ pa vektor translacije. Zgornja matrika, ki je dimenzije 4×4 poljuben vektor 4×1 zavrti in ga prestavi za vektor $\vec{t}$.

V našem primeru, ko želimo računati gibanje robota, potrebujemo transformacijske objekte, ki elemente Cliffordove algebre zavrtijo in prestavijo. Takšne transformacijske objekte je Clifford poimenoval "motor" (sestavljanka besed "moment" in "vektor") in jih definiral kot objekte, ki rotacijsko os enega rotatorja pretvorijo v rotacijsko os drugega. Tak motor je sestavljen iz dveh delov ki sta nekako povezana z rotacijskima osema dveh nekomplanarnih rotorjev. Zaradi te definicije motorje imenujemo tudi *dvojni kvaternioni.*

Želimo torej linearizirati operacijo translacije. Obravnavanje moramo zato razširiti na štiri dimenzije in uporabiti specialno Cliffordovo podalgebro $Cl^+_{3,0,1}$, kjer plus pomeni, da vzamemo samo sode bazne elemente algebre $Cl_{3,0,1}$

$$\underbrace{1}_{scalar},\ \underbrace{\{\gamma_2\gamma_3, \gamma_3\gamma_1, \gamma_1\gamma_2, \gamma_4\gamma_1, \gamma_4\gamma_2, \gamma_4\gamma_3\}}_{6\ bivectors},\ \underbrace{I}_{unit\ pseudoscalar}.$$

Iz podpisa vidimo, da za $Cl_{3,0,1}$ velja, $\hat{e}_i^2 = 1$, $i = 1, 2, 3$; $\hat{e}_4^2 = 0$; $I = \hat{e}_{1234}$ in $I^2 = 0$. V tej specialni podaglebri so elementi prav dvojni kvaternioni. Dvojnost lahko hitro opazimo. Če prve tri bazne bivektorje pomnožimo s pseudoskalarjem dobimo ustrezne tri druge, trivialno pa to velja tudi za skalar. Kot primer, dvojni element bivektorja $\hat{e}_{23}$ je $I\hat{e}_{23} = \hat{e}_{41}$. Zaradi dvojne narave teh elementov lahko poljuben $Q \in Cl^+_{3,0,1}$ zapišemo kot

$$Q = q_1 + Iq_2,$$

kjer sta q_1 in q_2 kvaterniona ($q = a_0 + a_1\hat{e}_{23} + a_2\hat{e}_{31} + a_3\hat{e}_{12}$), Q pa kot že vemo imenujemo dvojni kvaternion (bikvaternion).

Če sta kvaterniona normirana (sta torej rotorja) lahko motor $M \in Cl^+_{3,0,1}$ zapišemo tudi kot [6]

$$M = R + IR' = R + I\frac{\vec{t}}{2}R = (1 + I\frac{\vec{t}}{2})R = TR,$$

kjer oklepaj poimenujemo *translator*. Motor je torej produkt translatorja in rotatorja. To smo tudi pričakovali, saj smo želeli linearizirat operacijo translacije. Ker velja $I^2 = I^3 = ... = 0$ lahko translator zapišemo tudi v Eulerjevi obliki

$$T = \left(1 + I\frac{\vec{t}}{2}\right) = e^{I\frac{\vec{t}}{2}}.$$

3.1.3 Reprezentacija točk v $Cl^+_{3,0,1}$

V prostoru $Cl^+_{3,0,1}$ smo spoznali konstrukte, ki elemente rotirajo in translirajo. Sedaj pa si oglejmo, kako zapišemo geometrijske elemente, na primer točke, v tem prostoru.

Točko $\vec{x} = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + x_3\hat{e}_3$ iz treh dimenzij predstavimo v $Cl^+_{3,0,1}$ v bivektorski bazi [5]

$$\begin{aligned} X &= 1 + x_1\hat{e}_{41} + x_2\hat{e}_{42} + x_3\hat{e}_{43} \\ &= 1 + I\left(x_1\hat{e}_{23} + x_2\hat{e}_{31} + x_3\hat{e}_{12}\right) \\ &= 1 + I\vec{x}. \end{aligned}$$

Podobno se da zapisati tudi črte in ravnine, vendar tega ne bomo potrebovali. Preizkusimo, kako deluje motor na tako podani točki. Podobno kot pri rotaciji moramo začetno točko pomnožiti z motorjem iz leve in s konjugirano vrednostjo iz desne

$$\begin{aligned} X' &= MX\widetilde{\overline{M}} \\ &= TR\left(1 + I\vec{x}\right)\widetilde{R}T \\ &= \left(1 + I\frac{\vec{t}}{2}\right)\left(1 + IR\vec{x}\widetilde{R}\right)\left(1 + I\frac{\vec{t}}{2}\right) \\ &= 1 + I\left(R\vec{x}\widetilde{R} + \vec{t}\right). \end{aligned}$$

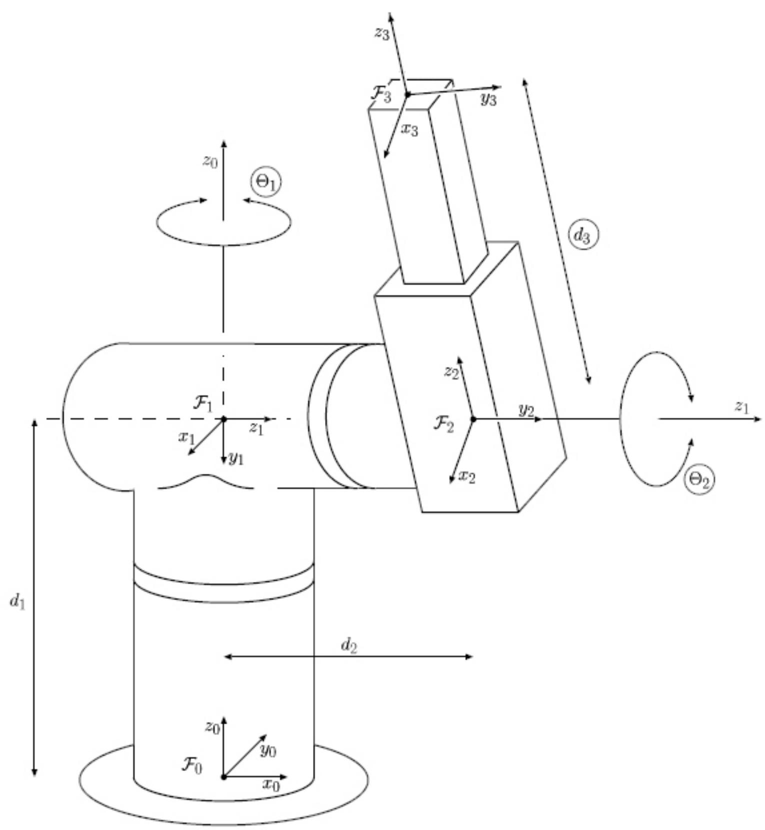
Iz zadnjega izraza se nazorno vidi, da motor točko zavrti (glede na izhodišče) in prestavi za vektor $\vec{t}$. Sedaj, ko znamo predstaviti točko in jo z linearno operacijo vrteti ter premikati po prostoru, smo končno pripravljeni na spopad z roboti.

3.2 Robotska roka

Linearni značaj motorja je ključna lastnost, ki nam bo olajšala opis robota. Robot je sestavljen iz večih togih delov, ki so med sabo povezani z vrtljivimi ali raztegljivimi spoji. Vsak tak del lahko opišemo z motorjem, te pa zaradi linearnosti enostavno možimo enega za drugim, kakor si sledijo gibajoči se členi pri robotu.

$$^{0}M_i =^{0} M_1 \, ^{1}M_2 \, ... \, ^{i-1}M_i = \prod_{n=1}^{i} \, ^{n-1}M_n,$$

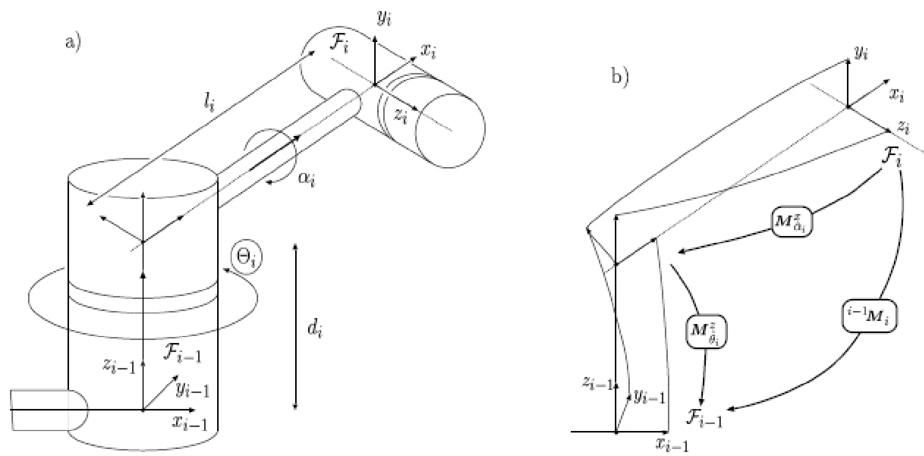
kjer $^{i}M_j$ prestavi točko iz j v i. Da ne bomo imeli predolgih enačb bomo računali poenostavljeno robotsko roko tipa Stanford [3], ki jo prikazuje (Slika 3).



Slika 3: Slika poenostavljene robotske roke Stanford. Obkroženi parametri so spremenljivi [3].

Na sliki so na različnih mestih $\mathcal{F}_i$ označeni koordinatni sistemi. Iz enega pridemo v drugega z dvema motornima tranformacijama, z določeno, npr. $M^x_{\alpha,l}$ in s spremenljivo, npr. $M^z_{\vartheta,d}$ (Slika 4)

$$^{i-1}M_i = M^x_{\alpha_i,l_i}\ M^z_{\vartheta_i,d_i}.$$



Slika 4: a) i-ti člen robotske roke s koordinatnimi sistemi. Obkroženi parameter je spremenljiv. b) Transformacija iz i-tega do (i-1)-ega člena $^{i-1}M_i$ je sestavljan iz dveh motornih tranformacij $M^x_{\alpha_i,l_i}$ in $M^z_{\vartheta_i,d_i}$ [3].

Točko v $\mathcal{F}_i$, ki jo gledamo iz $\mathcal{F}_j$ poimenujmo ^jP_i. Izračunajmo, kako se točka na koncu naše robotske roke (v $\mathcal{F}_3$) zapiše v koordinatnem sistemu $\mathcal{F}_0$. Tega se lotimo tako, da točko v $\mathcal{F}_3$ z $^2M_3$ pretransformiramo v $\mathcal{F}_2$ z $^1M_2$ v $\mathcal{F}_1$ in z $^0M_1$ v $\mathcal{F}_0$. Iz (Slike 3) preberemo ustrezne parametre za transformacijske matrike

$$\begin{aligned}
^0M_1 &= T^{z_0}_{d_1} R^{z_0}_{\vartheta_1} T_0 R^{x_1}_{-90^\circ} = T^{z_0}_{d_1} R^{z_0}_{\vartheta_1} R^{x_1}_{-90^\circ},\\
^1M_2 &= T^{z_1}_{d_2} R^{z_1}_{\vartheta_2} T_0 R^{x_2}_{90^\circ} = T^{z_1}_{d_2} R^{z_1}_{\vartheta_2} R^{x_2}_{90^\circ},\\
^2M_3 &= T^{z_2}_{d_3} R_0 T_0 R_0 = T^{z_2}_{d_3},
\end{aligned}$$

postavimo točko v $\mathcal{F}_3$ v izhodišče in izračunajmo ostale

$$\begin{aligned}
^3P_3 &= 1 + I \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,\\
^2P_3 &= {}^2M_3\, {}^3P_3\, {}^2\widetilde{\overline{M}}_3 = 1 + I \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d_3 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{}^1P_3 &= {}^1M_2\,{}^2P_3\,{}^1\widetilde{\overline{M}}_2 = 1 + I\begin{pmatrix} d_3\sin(\vartheta_2) \\ -d_3\cos(\vartheta_2) \\ d_2 \end{pmatrix}, \\
{}^0P_3 &= {}^0M_1\,{}^1P_3\,{}^0\widetilde{\overline{M}}_1 = 1 + I\begin{pmatrix} d_3\sin(\vartheta_2)\cos(\vartheta_1) - d_2\sin(\vartheta_1) \\ d_3\sin(\vartheta_2)\sin(\vartheta_1) + d_2\cos(\vartheta_1) \\ d_3\cos(\vartheta_2) + d_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Zadnji izraz predstavlja točko na koncu naše roke v koordinatnem sistemu $\mathcal{F}_3$. S tem postopkom znamo sedaj izračunati točko na kateremkoli delu poljubno zapletene robotske roke.

4 Zaključek

V tem sestavku sem na kratko predstavil osnove Cliffordove algebre, od reprezentacije geometrijskih elementov pa do geometrijskega produkta. Slednji nam ponuja zelo močno matematično orodje, s katerim lahko geometrijske probleme rešujemo popolnoma algebraično.

Geometrijska algebra oz. Cliffordova algebra je zaradi tega uporabna na mnogih področjih [3] od obdelave več dimenzijskih signalov, nevronskih mrež, računalniškega vida, pa do manipuliranja z roboti, kar smo si v drugem delu pogledali tudi mi. Videli smo, da je Cliffordova algebra opis gibanja robotske roke zelo poenostavila, saj bi lahko dodali še poljubno število členov, pa se težavnost problema ne bi bistveno spremenila.

Cliffordova algebra je zelo uporabna tudi v fiziki. Poleg kvante mehanike in relativistične mehanike se med drugim pojavlja tudi v analitični oz. klasični mehaniki. Videli smo, da se v Cliffordovi algebri posplošijo kompleksna števila, kvaternioni in vektorski produkt, posploši pa se lahko tudi diferencialna geometrija [2], oziroma celotna vektorska analiza. Zato menim, da bi bila geometrijska algebra odlično orodje fizikom, saj daje posplošen okvir mnogim matematičnim konstruktom in mogoča preprost skok v naslednje dimenzije, kjer se najdejo novi in zanimivi problemi.

Literatura

[1] Dorst L., Manny S. *Geometric algebra: a computational framework for geometrical applications (part I: algebra)*. Dostopno na URL-naslovu: http://staff.science.uva.nl/˜leo/clifford/dorst-mann-I.pdf (19. maj 2007).

[2] Dorst L., Manny S. *Geometric algebra: a computational framework for geometrical applications (part II: applications)*. Dostopno na URL-naslovu: http://staff.science.uva.nl/˜leo/clifford/dorst-mann-II.pdf (19. maj 2007).

[3] Sommer, G. *Geometric Computing With Clifford Algebra.* Springer, 2001. 19. poglavje: *Kinematics of Robot Manipulators in the Motor Algebra.* Dostopno na URL-naslovu:

http://www.ks.informatik.uni-kiel.de/˜vision/doc/Publications/geocom/bayro_kaehler.pdf (19. maj 2007).

[4] Lounesto, P. *Clifford algebra and spinors.* Cambridge University Press, 2001.

[5] Bayro-Corrochano, E. and Lasenby, J. *A Unified Language of Computer Vision and Robotics.* Dostopno na URL-naslovu: http://www.ks.informatik.uni-kiel.de/˜vision/doc/Publications/edb/afp97-cvrob-final-9.pdf (19. maj 2007).

[6] Bayro-Corrochano, E., Kähler, D. *Motor algebra approach for computing the kinematics of robot manipulators.* Journal of Robotic Systems, 17(9):495-516, 2000. Dostopno na URL-naslovu: http://www.ks.informatik.uni-kiel.de/˜vision/doc/Publications/edb/00_jrobsys.pdf (19. maj 2007).